Toets Discrete Structuren

donderdag 11 december 2003, 14 - 16 uur

Elke opgave levert maximaal 10 punten op. Het cijfer is gelijk aan (p/10) + 1, afgerond op gehele en halve waarden, waarbij p het totaal aantal behaalde punten is. Een 5 of hoger levert vrijstelling bij het tentamen van 6 februari 2004 voor de stof van de eerste 4 hoofdstukken. Bij vrijstelling telt het toetsresultaat voor de helft mee bij de berekening van het eindcijfer.

Nota Bene: beargumenteer je antwoorden.

1. In deze opgave beschouwen we functies $f : S \to T$. Definieer: f is injectief (one-to-one); f is surjectief (onto). Geef een voorbeeld van een functie die injectief maar niet surjectief is. Geef ook een voorbeeld van een functie die surjectief maar niet injectief is.

2. Bewijs **mbv. een lineair geannoteerd bewijs** dat de formule

   $$((p \to q) \to (p \vee r)) \leftrightarrow (\neg r \to p)$$

   een tautologie is.

3. Beschouw de volgende uitspraak:

   > Als ik Sinterklaas ben of de Kerstman ben, dan ben ik niet jong en draag ik een baard.

   a. Vertaal deze uitspraak in een propositionele formule (die we A zullen noemen). Gebruik daarbij de propositionele variabelen s, k, j, b, en geef aan welke betekenis je aan deze variabelen geeft.
   b. Geef de contrapositie B van A (zowel de uitspraak als de formule).
   c. Geef de converse C van A (idem).
   d. Als A waar is, is B dan waar? en C? Beargumenteer!

4. Bewijs: er zijn oneindig veel priemgetallen.

5. De relatie $\sim$ op N is gedefinieerd door: $m \sim n$ dan en slechts dan als $m - n$ deelbaar is door 5. Bewijs dat $\sim$ een equivalentie-relatie is. Hoe zien de equivalentieklassen van $\sim$ eruit?

6. Bewijs met volledige inductie over N:

   $$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

7. Formuleer de *Loop Invariant Theorem* (een bewijs wordt niet gevraagd).

8. m, n, q, r zijn gehele getallen. Laat zien dat $m = q \cdot n + r \ \wedge \ r \geq 0$ een invariant is van

   ```
   while  r >= n  do
      q := q + 1
      r := r - n
   ```

9. Geef een expliciete formule voor s_n, gegeven door

   $$s_0 = 1$$
   $$s_1 = 2$$
   $$s_n = 4s_{n-1} - s_{n-2} \quad \text{voor} \quad n \geq 2$$